

합성 영등식 기법을 이용한 시변 시간지연이 있는 T-S 퍼지시스템에서의 안정성 해석

김영재*, 이용권*, 이승훈*, 권오민*
충북대학교*

Stability analysis for T-S fuzzy system with time-varying delay via augmented zero equality approach

Yeong-Jae Kim*, Yong-Gwon Lee*, Seung-Hoon Lee*, Oh-Min Kwon*
Chungbuk National University*

Abstract 본 논문은 시간지연이 있는 Takagi-Sugeno (T-S) 퍼지 시스템의 안정성 해석을 다룬다. 적절한 합성 Lyapunov-Krasovskii funation (LKF)을 만들고 수학적 기법들을 활용하였으며, 합성 영등식 기법을 이용하여 개선된 T-S 퍼지 시스템의 안정성 조건을 Linear matrix inequality (LMI)의 형태로 유도하였다. 제안한 방법의 우수함과 유효함을 예제를 통해 보였다.

1. 서 론

T-S 퍼지 모델은 다양한 선형 시스템의 이론들과 퍼지 논리 이론을 조합할 수 있다는 장점으로 인하여 복잡한 비선형 동적 시스템을 근사화하는 데 사용된다. 특히, 복잡한 비선형 시스템을 선형 시스템들의 합으로 나타낼 수 있으므로, T-S 퍼지 시스템에서의 안정성 분석, 제어기 설계 등 다양한 연구가 진행되었다.[1]

그리고 다양한 현실적인 요인으로 인하여 시스템에 시간 지연이 생길 수 있고, 이로 인하여 시스템의 성능이 저하되거나 불안정할 수 있다. 이를 방지하기 위하여 LKF를 이용한 시간 영역에서의 해석이 주로 이용되고, 그 과정에서 다양한 수학적 기법들이 이용된다. [2-4]

본 논문에서는 합성된 LKF를 선정하고 연산에 필요한 변수를 최소화하기 위해 여러 가지 수학적 기법을 사용하여 LMI의 형태로 안정성 조건을 유도하였다. 또한, 결과의 우수함 및 유효함을 보이기 위해 예제를 통해 기존의 결과들과 비교하였다.

2. 본 론

2.1 문제 설정

시변 시간 지연이 있는 T-S 퍼지 시스템을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{x}(t) = \sum_{l=1}^r \mu_l(x(t)) (A_l x(t) + A_{dl} x(t-h(t))), \quad (1)$$

$$0 \leq h(t) \leq h_M, \quad \dot{h}(t) \leq h_D. \quad (2)$$

여기서 $x(t) \in R^n$ 은 상태벡터이고, $A_l, A_{dl} \in R^{n \times n}$ 은 알고 있는 시스템 행렬이다. r 은 퍼지 규칙의 개수, $\mu_l(x(t))$ 은 퍼지 집합에 대한 정규 멤버십 함수이며 $0 \leq \mu_l(x(t)) \leq 1$ 과 $\sum_{l=1}^r \mu_l(x(t)) = 1$ 을 만족한다. h_M 과 h_D 는 알고 있는 양의 실수이다.

보조 정리 1. Auxiliary function-based integral inequality [2]

보조 정리 2. Reciprocally convex approach [3]

2.2 주요 결과

이 절에서는 시스템 (1)에 대한 안정성 해석을 다룬다. 행렬 표현을 간략화하기 위해 다음과 같이 정의한다.

$$e_i = [0_{n \times (i-1)n}, I_n, 0_{n \times (15-i)n}]^T \in R^{15n \times n}, \quad i = 1, \dots, 15, e_0 = 0_{11n \times n},$$

$$\phi_{i,j}(f(\cdot), a, b) = \frac{1}{(a-b)^j} \underbrace{\int_{t-a}^{t-b} \int_s^{t-b} \int_u^{t-b} f(\cdot) dv du ds}_{i\text{-th integral}}$$

$$\zeta^T(t) = \{x^T(t), x^T(t-h(t)), x^T(t-h_M), \dot{x}^T(t), \dot{x}^T(t-h_M), \phi_{10}(x^T(s), h(t), 0), \phi_{10}(x^T(s), h_M, h(t)), \phi_{21}(x^T(u), h(t), 0), \phi_{21}(x^T(u), h_M, h(t)), \phi_{32}(x^T(v), h(t), 0), \phi_{32}(x^T(v), h_M, h(t)), \phi_{11}(x^T(s), h(t), 0), \phi_{11}(x^T(s), h_M, h(t)), \phi_{22}(x^T(u), h(t), 0), \phi_{22}(x^T(u), h_M, h(t))\},$$

$$\Xi_{[h(t)]} = \Xi_{1[h(t)]} + \Xi_{2[h(t)]} + \Xi_{3[h(t)]} + \Xi_4,$$

$$\Xi_{1[h(t)]} = Sym\{[e_1, e_3, e_6 + e_7, h(t)e_8 + (h_M - h(t))(e_6 + e_9)] \times R[e_4, e_5, e_1 - e_3, h_M e_1 - e_6 - e_7]^T\},$$

$$\Xi_{2[h(t)]} = [e_4, e_1, e_0, e_0] N[e_4, e_1, e_0, e_0]^T - [e_5, e_3, e_1 - e_3, e_6 + e_7] N[e_5, e_3, e_1 - e_3, e_6 + e_7]^T + Sym\{[e_1 - e_3, e_6 + e_7, h_M e_1 - e_6 - e_7, h(t)e_8 + (h_M - h(t))(e_6 + e_9)] N[e_0, e_0, e_4, e_1]^T\},$$

$$\Xi_{3[h(t)]} = [e_1, e_0, e_1 - e_3] G[e_1, e_0, e_1 - e_3]^T - (1 - h_D) [e_2, e_1 - e_2, e_2 - e_3] G[e_2, e_1 - e_2, e_2 - e_3]^T - Sym\{[e_6, h(t)e_1 - e_6, e_6 - h(t)e_3] G[e_0, e_4, e_5]^T\}$$

$$\Xi_4 = h_M^2 [e_4, e_1] Q[e_4, e_1]^T + h_M e_1 P_1 e_1^T - h_M e_2 P_1 e_2^T + h_M e_2 P_2 e_2^T - h_M e_3 P_2 e_3^T,$$

$$Q_{aug,k} = Q + \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & P_k \\ P_k & 0_{n \times n} \end{bmatrix},$$

$$Q_k = diag\{Q_{aug,k}, 3Q_{aug,k}, 5Q_{aug,k}\}, \quad (k = 1, 2),$$

$$A = [e_1 - e_2, e_6, -e_1 - e_2 + 2e_{10}, e_6 - 2e_8, e_1 - e_2 + 6e_{12} - 12e_{14}, e_6 - 6e_8 + 12e_{10}, e_2 - e_3, e_7, -e_2 - e_3 + e_{11}, e_7 - 2e_9, e_2 - e_3 + 6e_{13} + 12e_{15}, e_7 - 6e_9 + 12e_{11}]^T$$

$$\Omega_l = \begin{bmatrix} Q_1 & S_l \\ S_l^T & Q_2 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{l,[h(t)]} = \begin{bmatrix} A_l e_1^T + A_{dl} e_2^T - e_4^T \\ h(t) e_{12}^T - e_6^T \\ (h_M - h(t)) e_{13}^T - e_7^T \\ h(t) e_{14}^T - e_8^T \\ (h_M - h(t)) e_{15}^T - e_9^T \end{bmatrix}, \quad (l = 1, \dots, r).$$

정리 1. 시스템 (1)에서 양의 스칼라 h_M, h_D 이 주어지고 다음의 양한정 행렬 $R, N \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}, G \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}, Q \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, 대칭 행렬 $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 그리고 임의 행렬 $S_l \in \mathbb{R}^{6n \times 6n}$ ($l = 1, \dots, r$)이

$$(I_{l,[0]}^\perp)^T (\Xi_{[0]} - A^T \Omega_l A) (I_{l,[0]}^\perp) < 0, \quad (3)$$

$$(I_{l,[h_M]}^\perp)^T (\Xi_{[h_M]} - A^T \Omega_l A) (I_{l,[h_M]}^\perp) < 0, \quad (4)$$

$$\Omega_l > 0, \quad (l = 1, \dots, r) \quad (5)$$

위의 LMI를 만족한다면 시스템 (1)은 점근적으로 안정하다.

증명. 다음의 LKF를 고려한다.

$$\begin{aligned} V(t) = & \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h_M) \\ \phi_{10}(x(s), h_M, 0) \\ \phi_{20}(x(s), h_M, 0) \end{bmatrix}^T R \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h_M) \\ \phi_{10}(x(s), h_M, 0) \\ \phi_{20}(x(s), h_M, 0) \end{bmatrix} \\ & + \int_{t-h_M}^t \begin{bmatrix} \dot{x}(s) \\ x(s) \\ \phi_{10}(\dot{x}(u), t-s, 0) \\ \phi_{10}(x(u), t-s, 0) \end{bmatrix}^T N \begin{bmatrix} \dot{x}(s) \\ x(s) \\ \phi_{10}(\dot{x}(u), t-s, 0) \\ \phi_{10}(x(u), t-s, 0) \end{bmatrix} ds \\ & + \int_{t-h(t)}^t \begin{bmatrix} x(s) \\ \phi_{10}(\dot{x}(u), t-s, 0) \\ \phi_{10}(x(u), h_M, t-s) \end{bmatrix}^T G \begin{bmatrix} x(s) \\ \phi_{10}(\dot{x}(u), t-s, 0) \\ \phi_{10}(x(u), h_M, t-s) \end{bmatrix} ds \\ & + h_M \int_{t-h_M}^t \int_s^t \begin{bmatrix} \dot{x}(u) \\ x(u) \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} \dot{x}(u) \\ x(u) \end{bmatrix} dud s \end{aligned}$$

보조 정리 1과 보조 정리 2를 이용하여 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{V} \leq \zeta^T(t) (\Xi_{[h(t)]} - A^T \Omega_l A) \zeta(t)$$

마지막으로 [4]의 합성 영등식 기법을 이용하면 (3)과 (4)를 얻을 수 있다. 따라서, 시변 시간 지연이 있는 T-S 퍼지 시스템에서의 안정성 조건을 도출할 수 있다. 이것으로 증명을 마친다. ■

2.3 수치 예제

다음과 같이 시간 지연이 있는 퍼지시스템 (1)을 고려한다.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3.2 & 0.5 \\ 0 & -2.1 \end{bmatrix}, A_{d1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, A_{d2} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 1 & 1.6 \end{bmatrix},$$

$$\mu_1(x(t)) = \frac{1}{1 + \exp(-2x_1(t))}, \mu_2(x(t)) = 1 - \mu_1(x(t)).$$

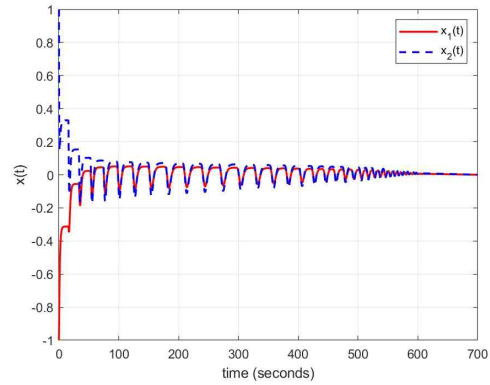
비교를 위해 정리 1의 안정성 조건으로 얻은 최대 허용 시간지연을 각각의 h_D 에 대하여 표 1에 나열하였다. 표 1에서 보듯이 정리 1을 이용한 결과는 모든 h_D 에 대하여 기존의 결과에 비해 우수함을 보인다. 그림 1은 $h_M = 1.6356, \mu = 0.5$ ($h(t) = 0.817 \sin(0.6t) + 0.818$), $x_0 = [-1, 1]^T$ 일 때의 상태궤적을 보여준다. 각 상태가 0으로 수렴함으로써 제안한 방법의 유효함을 보인다.

최근 [1]의 멤버십 함수를 활용한 알고리즘을 많이 이용하고 있고, 현재 연구에 적용하게 되면 $h_D = 0.03$ 일 때 4.5119,

$h_D = 0.9$ 일 때 1.5803의 최대 허용 시간 지연을 얻을 수 있다.

<표 1> 여러 h_D 에 대한 $h(t)$ 의 최댓값 (예제 1)

h_D	0.03	0.1	0.5	0.9
H.-B. Zeng et al. 2014	0.8771	0.7687	0.7584	0.7524
Z. Lian et al. 2017	1.9137	1.4354	1.3123	1.2063
정리 1	2.3588	1.8129	1.6356	1.5642



<그림 1> 시스템 (1)의 상태궤적 (예제 1)

3. 결 론

본 논문은 시간지연이 있는 T-S 퍼지 시스템의 안정성 해석을 다루었다. 정리 1에서는 Lyapunov 해석 기법에 기반을 두고, 적절한 LKF를 선정, 몇 가지 보조 정리와 수학적 기법을 적용하여 음한정 조건을 만족하는 LMI 형태로 안정성 조건을 제시하였다. 수치 예제를 통해 합성 영등식 기법을 사용했을 때, 이전의 연구들보다 더 큰 시간 지연을 보장함을 볼 수 있다.

감사의 글

이 논문은 2020년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No. 2020R1A6A1A12047945).

[참고 문헌]

- [1] L. Wang, H.-K. Lam, "A new approach to stability and stabilization analysis for continuous-time takagi-sugeno fuzzy systems with time delay", IEEE Trans on fuzzy systems, Vol. 26(4), pp. 2460-2465, 2018.
- [2] P.G. Park, W.I. Lee, S.Y. Lee, "Auxiliary function-based integral inequalities for quadratic functions and their applications to time-delay systems", Journal of the Franklin Institute, Vol. 352, pp. 1378-1396, 2015.
- [3] P.G. Park, J.W. Ko, C. Jeong, "Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays", Automatica, Vol. 47(1), pp. 235-538, 2011.
- [4] O.M. Kwon, S.H. Lee, M.J. Park, S.M. Lee, "Augmented zero equality approach to stability for linear systems with time-varying delay", Applied Mathematics and Computation, Vol. 381, 125329, 2020.