2022년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2022. 7. 13 ~ 16

시간 지연을 갖는 특이 마르코브 점프 시스템의 H_∞ 안정성 분석

이해성*, 박부견*
포항공과대학교*

H_∞ Stability Analysis of Singular Markov Jump System with Time Delay

Hae Seong Lee*, PooGyeon Park*
POSTECH*

Abstract - 본 논문에서는 시간 지연을 갖는 특이 마르코브 점프 시스템의 delay-dependent 제한 보조 정리를 제시한다. Lyapunov-Krasovskii Functional 방식을 이용하여 안정성을 분석하고 zero equality를 활용하여 덜 보수적인 안정성 기준을 제안한다. 또한, 엄격한 선형 행렬 부등식 형태로 안정성 기준을 나타내어 numerical한 관점에서 우수한 기준을 도출한다. 수치적 예제를 통해 제안된 안정성 기준의 우수성을 검증한다.

1. 서 론

마르코브 점프 시스템은(Markovian jump system)은 마르코브 프로세스를 따르는 부 시스템으로 구성된 시스템 모델으로 갑작스러운 변화와 같은 현상을 잘 표현할 수 있다는 특징을 가져 공정 시스템, 네트워크 시스템, 파워 시스템 등 다양한 분야의 모델링에 활용된다. 특이 시스템(singular system)은 시스템의 동적 특징을 미분 방정식으로, 정적 특징을 대수 방정식으로 표현하여 state-space 시스템보다 현상을 더 일반적으로 표현할 수 있다는 특징을 가진다. 시간 지연이란 다양한 시스템에서 필연적으로 발생하는 현상으로 시간 지연이 존재하는 시스템의 안정성 분석에 대한 연구는 지속적으로 수행되고 있다.

한편, 실제 시스템에서 예상치 못한 외란은 시스템의 안정성을 크게 저하시킬 수 있는데, 이러한 외란 역시 필연적으로 발생하기 때문에 외란에 강인한 제어기를 개발하는 연구가 활발히 이루어지고 있다. 외란에 강인한 제어 이론 연구로서 외란과 시스템 출력 간 전달 함수의 H_∞ norm을 다루는 제한 보조 정리(bounded real lemma)에 대한 연구가 이루어지고 있다.

따라서, 본 논문에서는 시간 지연을 갖는 특이 마르코브 점프 시스템의 H_∞ norm을 고려한 delay-dependent 제한 보조 정리에 대해 다루고자 한다. 또한, 기존 연구에서는 delay-dependent 제한 보조 정리를 엄격하지 않은 선형 행렬 부등식의 형태로 나타내었는데, 이는 numerical computation 관점에서 취약하고 제어기를 설계할 때 문제를 발생시킬 수 있다. 따라서, 본 논문에서는 delay-dependent 제한 보조 정리를 엄격한 선형 행렬 부등식의 형태로 나타내어 이러한 문제를 해결하고자 한다.

2. 본 론

2.1 문제정리

본 논문에서는 다음과 같은 특이 마르코브 점프 시스템을 다룬다.

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A(r_t)x(t) + A_d(r_t)x(t-d) + B_w(r_t)w(t) \\ z(t) = C(r_t)x(t) + C_d(r_t)x(t-d) + D_w(r_t)w(t) \\ x(t) = \phi(t),\ t \in [-\bar{d}, 0] \end{cases} \tag{1}$$

$x(t), z(t), w(t)$는 각각 시스템 상태, 목표 출력, 외란을 나타내고 $w(t) \in \ell_2[0,\infty)$이다. 행렬 E는 특이 행렬로 가정한다. d는 $0 \le d \le \bar{d}$를 만족하는 시스템에 존재하는 시간 지연, $\phi(t)$는 해당 구간에서 연속인 초기 함수이다. $\{r_t, t \ge 0\}$는 마르코브 체인으로 $\ell = \{1,2,\dots,s\}$의 값을 갖고 각 원소 간 전이 확률은 다음과 같이 정의된다.

$$\Pr(r_{t+h} = j | r_t = i) = \begin{cases} \pi_{ij}h + o(h), & j \ne i \\ 1 + \pi_{ii}h + o(h), & j = i \end{cases}$$

여기서 π_{ij}는 모드 i에서 j로의 전이 비율이다. 편의성을 위해 프로세스 $r_t = i$일 때 첨자 i를 이용해 모드 의존 행렬을 $A(r_t = i) = A_i$와 같이 나타낸다. 또한, 특이 행렬 E를 다루기 위해 행렬 E_L, E_R, R, S를 추가로 정의하여 사용한다.

$E_L E_R^T = E,\ RE = 0,\ ES = 0.$

정의 1.

시간 지연을 갖는 특이 마르코브 점프 시스템의 확률적 허용성은 다음과 같이 정의된다.

1) 외란이 없는 시간 지연을 갖는 특이 마르코브 점프 시스템이 모든 $i \in \ell$에 대해 $\det(sE - A_i) \ne 0$을 만족하면 시스템은 regular하다.

2) 외란이 없는 시간 지연을 갖는 특이 마르코브 점프 시스템이 모든 $i \in \ell$에 대해 $\deg(\det(sE - A_i)) = rank(E)$를 만족하면 시스템은 impulse-free 하다.

3) 외란이 없는 시간 지연을 갖는 특이 마르코브 점프 시스템에서 다음을 만족하는 스칼라 $M(r_0, \phi(\bullet))$가 존재하면 시스템은 확률적으로 안정하다.

$$\lim_{t\to\infty} E\left\{\int_0^t \| x(s) \|^2 ds | r_0,\ x(s) = \phi(s),\ s \in [-\bar{d}, 0]\right\} \le M(r_0, \phi(\bullet))$$

4) 외란이 없는 시간 지연을 갖는 특이 마르코브 점프 시스템이 모든 $i \in \ell$에 대해 regular, impulse-free하고 확률적으로 안정할 경우 확률적 허용성을 갖는다.

정의 2.

입력과 외란이 없는 시간 지연을 갖는 특이 마르코브 점프 시스템이 확률적 허용성을 갖고 zero initial condition에서 아래 조건을 만족하면 시스템은 H_∞ performance γ에 대해 확률적 허용성을 갖는다.

$$E\left\{\int_0^\infty z^T(t)z(t)dt\right\} \le \gamma^2 \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt$$

위의 정의들을 기반으로 아래의 Delay-dependent 제한 보조 정리를 제안한다.

2.2 Delay-dependent 제한 보조 정리

만약 스칼라 $\bar{d}, \gamma$가 주어졌을 때 모든 $i \in \ell$에 대하여 아래의 LMI를 만족하는 양의 정부호 행렬 Q_i, Q, L, 대칭 행렬 P_i, 비특이 행렬 Φ_i, 행렬 $M_i, O_i, T_i, U_i, V_i, W_i$이 존재하면 시스템 (1)은 H_∞ performance γ에 대해 확률적 허용성을 갖는다.

$$E_L^T P_i E_L > 0$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{i11} & \Sigma_{i12} & \Sigma_{i13} & M_i^T B_{wi} & \bar{d}\, T_i & C_i^T \\ * & \Sigma_{i22} & \Sigma_{i23} & O_i^T B_{wi} & \bar{d}\, U_i & 0 \\ * & * & \Sigma_{i33} & 0 & \bar{d}\, V_i & C_{di}^T \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & D_{wi}^T \\ * & * & * & * & -\bar{d} L & 0 \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$Q_i < Q$$

where

$\mu = \max\{|\pi_{ii}|, i \in \ell\}$,

$\Sigma_{i11} = \sum_{j=1}^{s} \pi_{ij} E^T P_j E + Q_i + \mu \bar{d} Q + Sym\{A_i^T M_i + E^T T_i^T\}$,

$\Sigma_{i12} = X_i^T - M_i^T + A_i^T O_i + E^T U_i^T$,

$\Sigma_{i13} = M_i^T A_{di} - T_i E + E^T V_i^T + A_i^T W_i$,

$\Sigma_{i22} = \bar{d} L - O_i - O_i^T$,

$\Sigma_{i23} = -U_i E + O_i^T A_{di} - W_i$,

$\Sigma_{i33} = -Q_i + Sym\{-E^T V_i^T + A_{di}^T W_i\}$,

$X_i = P_i E + R^T \Phi_i S^T$.

증명:

확률적 안정성을 증명하기 위해 아래의 확률적 리아푸노프 함수와 벡터를 사용한다.

$$V_i(t) = V_{1i}(t) + V_{2i}(t) + V_{3i}(t) + V_{4i}(t)$$

$$V_{1i}(t) = x^T(t) E^T X_i x(t)$$

$$V_{2i}(t) = \int_{t-d}^{t} x^T(s) Q_i x(s) ds$$

$$V_{3i}(t) = \int_{-d}^{0}\int_{t+u}^{t} \dot{x}^T(s) E^T L E \dot{x}(s) ds du$$

$$V_{4i}(t) = \mu \int_{-d}^{0}\int_{t+u}^{t} x^T(s) Q x(s) ds du$$

$$\zeta(t) = \left[x^T(t)\ \ E\dot{x}^T(t)\ \ x^T(t-d)\ \ \left(-\int_{t-d}^{t} (1/\bar{d}) E\dot{x}(s) ds\right)^T \right]^T$$

또한, 증명을 위해 Jensen 적분 부등식과 아래의 zero equality들을 사용한다.

$$\left[x^T(t) T_i + (E\dot{x}(t))^T U_i + x^T(t-d) V_i\right] * \left[Ex(t) - Ex(t-d) - \int_{t-d}^{t} E\dot{x}(s) ds\right] = 0$$

$$\left[x^T(t) M_i^T + (E\dot{x}(t))^T O_i^T + x^T(t-d) W_i^T\right] * \left[-E\dot{x}(t) + A_i x(t) + A_{di} x(t-d)\right] = 0$$

분량 관계로 자세한 증명은 생략한다.

2.3 예제

제안하는 delay-dependent 제한 보조 정리를 통해 얻은 결과의 우수성을 평가하기 위한 수치적 예제는 아래와 같다.

For mode 1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.4972 & 0 \\ 0 & -0.9541 \end{bmatrix},\ A_{d1} = \begin{bmatrix} -1.010 & 1.5415 \\ 0 & 0.5449 \end{bmatrix}$$

$$B_{w1} = \begin{bmatrix} 0.4212 \\ -0.3211 \end{bmatrix}, C_1 = [-0.1252\ 0.4523],\ C_{d1} = 0,\ D_{w1} = 0.2$$

For mode 2:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.5121 & 0 \\ 0 & -0.7215 \end{bmatrix},\ A_{d2} = \begin{bmatrix} -0.8521 & 1.9721 \\ 0 & 0.4321 \end{bmatrix}$$

$$B_{w2} = \begin{bmatrix} 0.5100 \\ -0.3100 \end{bmatrix}, C_2 = [-0.1987\ 0.4921],\ C_{d2} = 0,\ D_{w2} = 0.1$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Pi = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.3 & -0.3 \end{bmatrix}$$

$$E_L = E_R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, R = S^T = [0\ 1]$$

위의 예제에 대해 주어진 H_∞ performance index γ에 따른 최대 허용 시간 지연($\bar{d}$)과 최대 허용 시간 지연($\bar{d}$)에 따른 γ를 계산한 결과는 아래와 같다.

γ	0.85	1.00	1.15	1.30
[1]	0.3945	0.4987	0.5862	0.6597
[2]	0.5553	0.6964	0.7943	0.8599
proposed	0.6524	0.7444	0.8139	0.8658

<표 1> γ에 따른 최대 허용 시간 지연

$\bar{d}$	0.5	0.6	0.7	0.8
[1]	0.8573	1.0021	1.1762	1.6857
[2]	0.8029	0.8920	1.0046	1.1608
proposed	0.6675	0.7803	0.9222	1.1163

<표 2> 최대 허용 시간 지연에 따른 최소 허용 γ

위 예제에 대해 주어진 γ에 따라 더 넓은 범위의 최대 허용 시간 지연을 갖는 것을 확인할 수 있고, 주어진 최대 허용 시간 지연에 따라 더 작은 γ를 갖는 것을 확인할 수 있다. 이를 통해 본 논문이 기존 연구 결과보다 덜 보수적인 안정성 기준을 확보했음을 알 수 있다.

3. 결 론

본 논문에서는 시간 지연을 갖는 특이 마르코브 점프 시스템의 delay-dependent 제한 보조 정리를 제시하였다. Zero equality를 활용하여 덜 보수적인 안정성 기준을 제안하였고, 엄격한 선형 행렬 부등식 형태로 나타냈다. 수치적 예제를 통해 제안된 안정성 기준이 덜 보수적임을 검증하였다.

감사의 글

This research was supported by the Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Science, ICT, and Future Planning (2020R1A2C2005709)

[참 고 문 헌]

[1] Wu, Zhengguang, Hongye Su, and Jian Chu. "Delay dependent H∞ control for singular Markovian jump systems with time delay." *Optimal Control Applications and Methods* 30.5: 443-461, 2009

[2] Wang, Junru, et al. "Delay-dependent H∞ control for singular Markovian jump systems with time delay." *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* 8: 1-12, 2013

[3] Feng, Zhiguang, and Peng Shi. "Two equivalent sets: Application to singular systems." *Automatica* 77: 198-205, 2017