파라미터 불확실성을 갖는 연속시간 상호결합 시스템을 위한 강인 분산 관측기 설계

구근범*, 현창호*, 백승묵*, 박봉석*,
공주대학교 전기전자제어공학부 및 공주대학교 IT융합기술연구소*

Robust Decentralized Observer Design for Continuous-Time Interconnected Systems with Parameter Uncertainties

Geun Bum Koo*, Chang-Ho Hyun*, Seung-Mook Baek*, Bong Seok Park*
Division of Electrical, Electronic and Control Engineering and Institute of IT Convergence Technology, Kongju National University*

Abstract - 본 논문에서는 파라미터 불확실성과 미지의 상호결합을 갖는 연속시간 상호결합 시스템을 위한 강인 분산 관측기 설계 기법을 제시한다. 상호결합 시스템의 하위 시스템과 분산 관측기를 기반으로, 오차식을 제시하고 관측기 설계 문제를 설정한다. 설계 문제 해결을 위해 분산 관측기의 성능함수를 정의하여, 이를 바탕으로 분산 관측기 설계 충분조건을 선형 행렬 부등식 형태로 제시한다. 마지막으로 모의실험을 통해 제시된 이론의 우수성을 입증한다.

1. 서 론

최근 상호결합 시스템에 대한 관심은 지속적으로 증가하고 있으며, 상호결합 시스템의 제어를 위한 분산(decentralized) 제어 기법, 역시 많은 연구가 진행되고 있다. 하지만 상호결합 시스템을 위한 분산 제어 기법에서 뛰어난 실적이 나오고 있는 반면, 분산 관측기 설계에 대한 연구는 아직까지 많은 한계점을 가지고 있다. 특히, 지금까지의 분산 관측기 설계는 대부분 분산 제어와 결합한다거나, 정확하게 알고 있는 시스템이나 점근적으로 안정한 시스템에 대해서만 연구가 진행되고 있는 실정이며. 아직까지 많은 추가적인 연구가 필요한 상태이다. 특히, 파라미터 불확실성이나 미지의 상호결합을 갖는 경우에 대한 분산 관측에 대한 연구는 거의 이뤄진 바가 없다.

이에 본 논문에서는 상호결합 시스템을 위한 강인 분산 관측기에 대한 연구를 진행한다. 특히, 상호결합 시스템은 파라미터 불확실성과 미지의 상호결합을 동시에 갖는다고 가정한다. 분산 관측기 설계를 위해 하위 시스템의 오차식을 구하고, 이를 바탕으로 분산 관측기 설계 문제를 제시한다. 그리고 분산 관측기에 대한 새로운 성능 함수를 정의하여 제시한 문제를 해결할 수 있는 조건을 선형 행렬 부등식의 형태로 나타낸다. 마지막으로 모의실험을 통해 설계된 분산 관측기의 성능을 입증한다.

2. 본 론

2.1 연속시간 상호결합 시스템과 강인 분산 관측기

다음과 같은 n개의 하위 시스템을 갖는 연속시간 상호결합 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= (A_k + \Delta A_k)x_k(t) + h_k(x(t)) \\ y_k(t) &= (C_k + \Delta C_k)x_k(t) \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $x_k \in R^{n_k}$와 $y_k \in R^{l_k}$는 각각 k번째 하위 시스템의 상태변수와 출력 변수를 의미한다. 그리고 행렬 A_k, C_k는 적절한 크기를 갖는 시스템 행렬과 출력 행렬을 나타내며, ΔA_k와 ΔC_k는 시스템 매개변수의 불확실성을 나타내며 다음의 가정을 만족한다.

$$[\Delta A_k \;\; \Delta C_k] = D_k F_k(t)\,[E_{1k} \;\; E_{2k}]$$

여기서, D_k는 불확실성 정도를 나타내는 대각행렬이고, E_{1k}와 E_{2k}는 원래 시스템 행렬과 출력 행렬의 구조를 나타내며, $F_k(t)$는 $F_k(t)^T F(t) \le I$를 만족하는 불확실한 함수 행렬이다. 또한, 전체 시스템 상태변수 $x(t) = col\{x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\}$를 기반으로 하는 $h_k(x(t))$는 다음의 가정을 만족하는 미지의 상호결합 함수이다.

가정 1 시스템의 상호결합을 나타내는 벡터 함수 $h_k(x(t))$는 다음의 이차부등식을 만족한다.

$$(h_k(x(t)))^T h_k(x(t)) \le \alpha^2 x(t)^T H_k^T H_k x(t)$$

여기서, $\alpha > 0$은 상호결합 범위 상수, H_k는 알고 있는 상수 행렬을 의미한다.

본 논문의 목적은 연속시간 상호결합 시스템 (1)을 위한 강인 분산 관측기를 설계하는 것으로 이때, 분산 관측기는 다음과 같이 고려할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_k(t) &= A_k \hat{x}_k(t) + L_k\big(y_k(t) - \hat{y}_k(t)\big) \\ \hat{y}_k(t) &= C_k \hat{x}_k(t) \end{aligned} \tag{2}$$

여기서 $\hat{x}_k(t)$와 $\hat{y}_k(t)$는 각각 k번째 하위 시스템의 추정 상태변수와 추정 출력변수를 나타내며, L_k는 관측 이득 행렬이다. 식 (1), (2)와 추정 오차 $e_k(t) = x_k(t) - \hat{x}_k(t)$를 통해, 다음과 같은 오차식을 구할 수 있다.

$$\dot{e}_k(t) = (A_k - L_k C_k)e_k(t) + (\Delta A_k + L_k \Delta C_k)x_k(t) + h_k(x(t)) \tag{3}$$

오차식 (3)을 기반으로 다음의 문제를 해결한다면 본 논문의 목적을 달성할 수 있다.

문제 1 다음의 조건을 만족하는 관측 이득 행렬 L_k을 구한다면, 상호결합 시스템을 위한 강인 분산 관측기를 설계하는 것이 가능하다.

1) $h_k(x(t)) = 0$과 $\Delta A_k = 0$일 때, 오차식 (3)은 점근적으로 안정해야 한다.
2) 전체 오차 $e(t) = col\{e_1(t), e_2(t), \cdots, e_n(t)\}$에 대해 부등식 $\| e(t) \| \le \gamma \| x(t) \|$를 만족하는 감쇠도상수 $\gamma \ge 0$가 존재해야 한다.
3) γ/α값이 최소화되어야 한다.

2.2 강인 분산 관측기 설계를 위한 선형 행렬 부등식

오차식 (3)을 기반으로 강인 분산 관측기를 설계하기 위해서는 먼저 성능 함수를 정의할 필요가 있다. 또한, 관측기 설계 조건을 선형 행렬 부등식으로 표현하기 위해서는 추가적인 보조정리가 필요하다.

정의 1 [1] 만약 다음의 성능 함수

$$J=\int_{0}^{\infty}\left(e(t)^{T}e(t)-\gamma^{2}x(t)^{T}x(t)\right)dt$$

에 대해 $J\le 0$을 만족하는 관측기 이득 행렬 L_k이 존재하면, 우리는 감쇠도상수 γ이 존재하고, 분산 관측기는 $\| e_k(t)\| \le\gamma\| x(t)\|$을 만족하며, 이때, 성능 함수 J를 관측성능 보장 함수라고 한다.

보조정리 1 [2] 주어진 상수 행렬 D와 E, 그리고 적절한 크기를 갖는 상수 대칭행렬 S이 주어질 때, 주어진 부등식 $S+DFE+E^{T}F^{T}D^{T}<0$은 임의의 상수 $\epsilon>0$에 대해 다음의 부등식을 만족하게 된다:

$$S+\left[\epsilon^{-1}E^{T}\quad \epsilon D\right]\begin{bmatrix}R & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon^{-1}E\\ \epsilon D^{T}\end{bmatrix}<0$$

여기서, F는 $F^{T}F\le R$을 만족한다.

위의 정의와 보조 정리를 이용하면 다음과 같은 강인 분산 관측기 설계 기법에 대한 정리를 얻을 수 있다.

정리 1 만약 다음의 선형 행렬 부등식을 만족하는 양한정 행렬 P_k와 임의의 행렬 N_k, 상수 σ_k가 존재하면, 강인 분산 관측기 (2)는 연속시간 상호결합 시스템 (1)을 문제 1을 해결하는 효과적인 관측기가 된다.

$$\min\ \sigma_k \quad subject\ to$$
$$\begin{bmatrix} He\{P_kA_k-N_kC_k\}+I & * & * & *\\ P_k & -\sigma_kI & * & *\\ P_kE_{1k}+N_kE_{2k} & 0 & -\epsilon^{-1}I & *\\ 0 & D_k^{T} & 0 & -\epsilon I\end{bmatrix}<0 \qquad (4)$$

여기서 $He\{S\}=S+S^{T}$를 나타내며 ϵ는 주어진 상수이다. 또한, 관측 이득 행렬은 $L_k=P_k^{-1}N_k$를 통해 구할 수 있다.

증명) 공간 제약으로 생략한다. ■

참조 1 정리 1에서 상수 σ_k는 $\sigma_k=\gamma^{2}/(n\lambda_k\alpha_k^{2}+1)$을 만족하는 값이고, 이때, λ_k는 행렬 $H_k^{T}H_k$의 최대 고유치이다. 즉, 위의 정리를 통해 σ_k를 최소화하게 되면 결과적으로 γ/α를 최소화하게 된다. 이는, 고정된 불확실한 상호결합 범위에 대한 오차를 최소화하는 것이거나, 혹은 일정 오차를 넘지 않는 최대 상호결합 범위를 구하는 방식으로의 관측기 설계를 의미한다.

2.3 모의실험

논문에 대한 내용을 검증하기 위해 다음과 같은 두 개의 하위 시스템으로 구성된 연속시간 상호결합 시스템을 고려한다.

$$\dot{x}_k(t)=A_kx_k(t)+h_k(x(t))$$

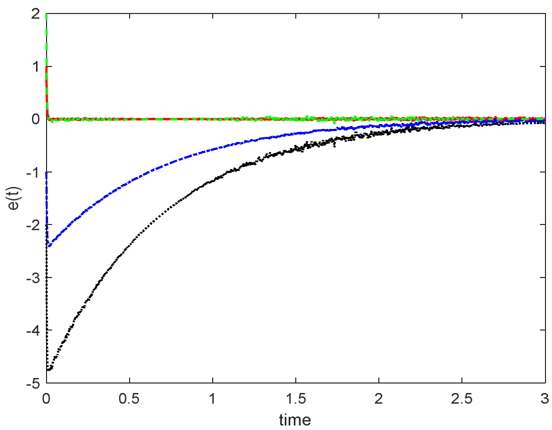
여기서, $x_k(t)=\left[x_{k1}(t)\ \ x_{k2}(t)\right]^{T}$이고, $h_k(x(t))=\alpha H_kx(t)$라고 가정하며, 시스템 행렬은 각각 다음과 같다.

$$A_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\qquad A_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix},$$
$$C_1=C_2=\left[1\ \ 0\right],$$
$$H_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -0.1 & 0 & 0.1\end{bmatrix},\qquad H_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.1 & 0 & -0.1\end{bmatrix}.$$

여기서, 시스템 행렬 A_k와 출력 행렬 C_k는 모두 10%의 파라미터 불확실성을 가진다고 설정하였다. 정리 1의 선형 행렬 부등식을 이용하여 관측기의 이득값을 구하면 다음과 같다.

$$L_1=\begin{bmatrix}304.8407\\ 439.7584\end{bmatrix},\qquad L_2=\begin{bmatrix}379.1475\\ 540.7659\end{bmatrix}$$

또한, 정리 1에서 최소의 δ는 2.3이 나온다. 이를 통해, 상호결합 대비 감쇠도 정도를 계산하면 고정된 상호결합 범위 $\alpha=1$에서 성능 함수의 오차 정도를 나타내는 γ가 1.5466 이하가 됨을 의미한다. 실제 그림 1은 상호결합 범위가 $\alpha=1$일 때의 관측 오차를 나타내고 있으며, 제안한 관측기가 우수한 관측 성능을 보이고 있음을 확인할 수 있다.



<그림 1> 관측오차 $e(t)$: $e_{11}(t)$ (실선), $e_{12}(t)$ (쇄선), $e_{21}(t)$ (파선), $e_{22}(t)$ (점선).

3. 결 론

본 논문에서는 파라미터 불확실성과 미지의 상호결합을 갖는 연속시간 상호결합 시스템을 위한 강인 분산 관측기를 설계하였다. 분산 관측기를 위한 설계 문제를 제시하고, 이를 해결하기 위한 성능함수를 도입하였다. 이를 바탕으로 분산 관측기 설계 조건을 선형 행렬 부등식의 형태로 표현하였다. 마지막으로 모의실험을 통해 제안한 관측기의 성능을 입증하였다.

[참 고 문 헌]

[1] G. B. Koo, J. B. Park, and Y. H. Joo, “Decentralized sampled-data fuzzy observer design for nonlinear interconnected systems,” IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol. 24, no. 3, pp. 661- 674, 2016.

[2] H. J. Lee, J. B. Park, and G. Chen, “Robust fuzzy control of nonlinear systems with parametric uncertainties,” IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol. 9, no. 2, pp. 369-379, 2001.