

## Descriptor 계통에 대한 외란관측기의 설계

엔크문크 수미야바야르, 윤현섭, 박승규  
 창원대학교 전기공학과

### Disturbance Observer Design for Descriptor Systems

Enkhmunkh Sumiyabayar, Hyeonsub Yun, Seungkyu Park  
 Department of Electrical Engineering, Changwon National University

**Abstract** - Descriptor 시스템에 대한 잔여외란을 고려할 수 있는 외란관측기를 설계한다. 기존의 외란관측기 설계는 시스템의 전체 안정도를 고려하지 않기 때문에 Descriptor 시스템이 아닌 경우의 DOB의 설계와 크게 다르지 않으나 잔여외란을 고려하는 DOB는 전체 안정도를 고려하여 설계가 되어야 한다. 이에 Descriptor 시스템에 대한 안정도와 외란관측기를 함께 고려할 수 있도록 리아프노프 후보함수를 선정하고 안정도를 확보하는 과정에서 잔여외란을 고려할 수 있는 외란관측기를 설계하였다.

#### 1. 서 론

Descriptor 시스템은 Singular system이라고도 하며 항공기 모델, 전회회로시스템, 전력시스템과 경제시스템 등의 응용 예를 많이 가지고 있다. Descriptor 시스템은 상태방정식과 대수방정식이 결합된 형태로 기존의 모델보다 더 광범위한 모델을 표현할 수 있다. 따라서 Descriptor 시스템은 지난 20년 동안 광범위하게 연구되어 왔으나 impulse free와 regularity와 같은 사항 들을 고려해야 한다[1][2]. 일반 상태공간 모델에서의 응답은 일정하나 descriptor모델은 impulsive dynamic 모드, finite 동특성 모드, nondynamic 모드 등 3가지 모드를 가질 수 있는 반면 기존 모델은 finite 동특성 만을 가진다. Descriptor 시스템의 구조적 안정도는 정의되지 않으며 임의의 초기 외란에 의해서 불안정해질 수 있다. 그러므로 Descriptor 모델의 안정도 해석과 제어문제에서 있어서 기존의 모델을 다루는 경우보다 복잡하다[3][4]. 시스템에 외란이 존재하는 경우, 외란을 추정하여 보상하는 외란관측기 기반 제어방법이 있다. 기존의 외란관측기 들은 그 설계에 있어서 전체 안정도를 고려하지 않기 때문에 추정외란이 과도추정 과정에서 발생하는 추정오차를 다룰 수 없으므로 잔여외란을 고려할 수 있는 DOB가 일반모델에 대해서 제안되었다[5]. Descriptor 모델에 대한 기존의 DOB 설계는 전체시스템의 안정도를 고려하지 않기 때문에 일반모델에서의 설계와 유사하지만 잔여오차를 고려하는 DOB의 설계는 전체시스템의 안정도를 같이 다루어야 하기 때문에 Descriptor 시스템의 안정도 해석의 어려움이 수반된다. 본 논문에서는 Descriptor 계통에 대한 DOB를 설계함에 있어서 전체 계통의 안정도를 고려하여 잔여외란을 고려할 수 있도록 하였다.

#### 2. 본 론

##### 2.1 문제 설정

Descriptor 시스템의 동특성 방정식이 다음과 같다고 하자.

$$\dot{E}x(t) = Ax(t) + Bu(t) + Bd(t) \quad (1)$$

여기서  $x(t) \in R^n$ 은 상태변수,  $u(t) \in R^m$ 은 입력변수이고  $d(t) \in R^r$ 은 미지의 외란이다. 행렬  $E \in R^{m \times n}$ 은  $rank(E) \leq n$  일 수 있다.

Descriptor 계통에 대한 가제어성을 다루기 위해 다음과 같은 개념들이 필요하다.

정의 1

- $|sE - A| \neq 0$  이면 pencil  $(E, A)$ 는 Regular이다.
- $rank(E) = \deg(\det(sE - A))$  이면  $(E, A)$ 는 Impulse free 이다.

3.  $|sE - A| = 0$  의 모든 근의 실수부가 음수이면 안정하다.

4. 위의 세가지 조건을 만족하면 식(1)의 Descriptor 계통은 Admissible 하다고 한다.

위의 계통에 대해서 DOB는 다음과 같이 설계할 수 있다.

$$\hat{d}(t) = v(t) - \lambda B^T E x(t)$$

$$\dot{v} = \lambda B^T (Ax(t) + Bu(t) + \hat{d}(t))$$

이 경우 추정오차의 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{\tilde{d}}(t) = \lambda B^T B \tilde{d}(t) - \dot{d}(t)$$

여기서  $\lambda B^T B < 0$  이다.

외란의 변화율이 영이라고 가정한다면 추정오차는 영으로 수렴하게 된다. 위의 DOB는 전체 시스템의 안정도와는 별개로 설계되어 있다. 그러므로 외란의 설계에 있어서도 Descriptor 계통의 동특성을 고려하기만 하면 어렵지 않게 DOB를 설계할 수 있다.

그러나 위의 DOB 설계와 전체시스템의 안정도에 있어서 추정오차가 반영되어 있지 않기 때문에 초기상태에 안정도에 영향을 미칠 수 있는 여지를 남기고 있다. 이에 전체 시스템의 안정도와 추정오차를 동시에 고려하여 안정도를 보장받을 수 있고 성능을 향상시킬 수 있는 새로운 DOB를 제안하고자 한다.

새로운 DOB를 설계하는데 있어서 전체시스템의 안정도를 동시에 고려하기 때문에 Descriptor 계통의 안정도 해석에 있어서의 특징들이 반영되어야 하는 어려움이 있다.

Descriptor 계통의 안정도 해석에 대해서 살펴보도록 한다.

일반적인 시스템과 같이 리아프노프 후보함수를 선정하면 다음과 같다.

$$V(t) = Ex(t)^T P Ex(t) \quad (2)$$

미분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= (\dot{E}x(t))^T P Ex(t) + Ex(t)^T P \dot{E}x(t) \\ &= (Ax(t))^T P Ex(t) + (Ex(t))^T P Ax(t) \\ &= x^T(t) (A^T P E + E^T P A) x(t) \end{aligned} \quad (3)$$

그러므로 안정할 조건은 다음과 같다.

$$A^T P E + E^T P A < 0 \quad (4)$$

그러나 위의 조건은  $rank(E) \leq n$  이기 때문에 만족시키는 P의 존재여부를 확인할 수 없다.

Singular Value Decomposition을 사용하면 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$UEV^T = E_r = \begin{bmatrix} I_{(r \times r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

식(1)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} E_{n \times n} \dot{z}(t) &= U A V^T z(t) + R B u(t) + R B d(t) \\ &= A_z z(t) + B_z (u(t) + d(t)) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $z(t) = V^T x(t)$  이다.

이 경우 Descriptor 계통의 안정도를 위해 리아프노프 함수를 다음과 같이 선정할 수 있다.

$$V(t) = z(t)^T E_r P z(t) = z_1^T(t) P_1 z_1(t) \quad (7)$$

여기서  $z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$   $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}$

위의 리아프노프 후보함수를 응용해 새로운 DOB를 구성하고자 한다.

## 2.2 새로운 DOB

새로운 DOB를 유도하기 위한 Lyapunov 후보함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{2}z(t)^T E_z P z(t) + \frac{1}{2}\tilde{d}^T(t)\tilde{d}(t) \\ &= \frac{1}{2}z_1^T(t)P_1 z_1(t) + \frac{1}{2}\tilde{d}^T(t)\tilde{d}(t) \end{aligned} \quad (9)$$

후보함수의 미분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \frac{1}{2}(\dot{z}^T(t)Pz(t) + z^T(t)P\dot{z}(t)) + \frac{1}{2}\tilde{d}^T(t)\dot{\tilde{d}}(t) \\ &= \frac{1}{2}(A_z z(t) + \tilde{d})^T P z(t) + \frac{1}{2}z^T(t)P^T(A_z z(t) + \tilde{d}) \\ &\quad + \tilde{d}^T(t)\dot{\tilde{d}}(t) \\ &\leq \tilde{d}^T P B^T z(t) + \tilde{d}^T(t)\dot{\tilde{d}}(t) \end{aligned} \quad (10)$$

안정한 제어기는 이미 설계되어 있어서  $A_z$ 는 안정하다고 가정하였다.

새로운 DOB는 다음과 같이 설계된다.

$$\begin{aligned} \hat{d}(t) &= v(t) - \lambda B^T E x(t) \\ \dot{v} &= \lambda B^T (A x(t) + B u(t) + \hat{d}(t)) + B^T P z(t) \end{aligned} \quad (11)$$

다음과 같은 부등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\lambda \|\tilde{d}(t)\|^2 + \|\tilde{d}(t)\|\mu \\ &\leq -\|\tilde{d}(t)\|(\lambda_m \|\tilde{d}(t)\| - \mu) \end{aligned} \quad (12)$$

그러므로  $\|\tilde{d}(t)\| > \frac{\mu}{\lambda_m}$  이면  $\dot{V}(t) < 0$  이므로 다음과 같이 외란 추정오차가 제한됨을 알 수 있다.

$$\|\tilde{d}(t)\| < \frac{\mu}{\lambda_m} \quad (13)$$

## 2.3 시뮬레이션

다음과 같은 Descriptor 계통에 대한 시뮬레이션을 다룬다.

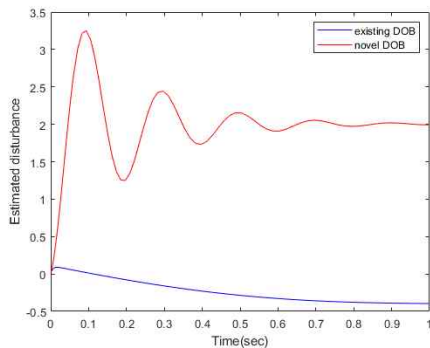
$$E = \text{diag}(1, 1, 1, m_1, m_2, 0)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -m_2 g/L - m_2 g/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_2 g/L - m_2 g/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_2 g/L & 0 & 0 & 2L \\ 0 & 0 & -2L & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

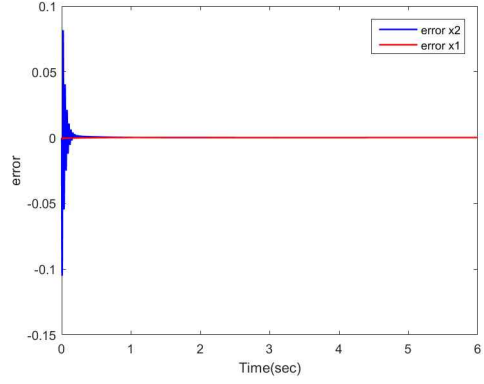
$$B = [0, 0, 0, 1, 0, 0]^T$$

$$m_1 = 10, m_2 = 2, L = 1, g = 9.8$$

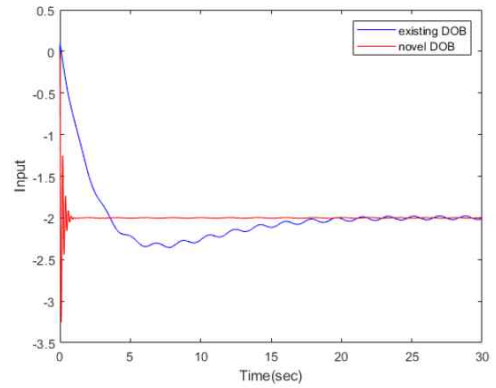
$$\lambda = -10, P = 1000, k = [1, 1, 1, 1, 1, 1]^T$$



<그림 2> 외란추정 성능



<그림 3> 제어성능 비교



<그림 4> 제어입력

## 3. 결 론

Descriptor 시스템에 대한 잔여외란을 고려할 수 있는 외란관측기를 설계한다. 기존의 외란관측기 설계는 시스템의 전체 안정도를 고려하지 않기 때문에 Descriptor 시스템이 아닌 경우의 DOB의 설계와 크게 다르지 않으나 잔여외란을 고려하는 DOB는 전체 안정도를 고려하여 설계가 되어야 한다. 이에 Descriptor 시스템에 대한 안정도와 외란관측기를 함께 고려할 수 있도록 리아프노프 후보함수를 선정하고 안정도를 확보하는 과정에서 잔여외란을 고려할 수 있는 외란관측기를 설계하였다.

## [참 고 문 헌]

- [1] Yu Feng, Mohamed Yagoubi, "Robust control of Linear Descriptor Systems", Studies in Systems, Decision and Control, 2017
- [2] A. Gerstner, R. Byersb, V. Mehrmann, N. K. Nichols, "Feedback design for regularizing descriptor systems," Linear Algebra and its Applications, Volume 299, Issues 1-3, 15 September 1999, Pages 119-151
- [3] G. Verghese, B. Levy and T. Kailath, "A generalized state-space for singular systems," in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 26, no. 4, pp. 811-831, August 1981
- [4] Yong-Yan Cao and Zongli Lin, "A descriptor system approach to robust stability analysis and controller synthesis," in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 49, no. 11, pp. 2081-2084, Nov. 2004
- [5] S. Park and T. S. Yoon, "State Space Disturbance Observer Considering Residual Disturbance," in IEEE Access, vol. 8, pp. 213882-213886, 2020