두 개의 시변 지연을 갖는 시스템의 안정성 분석을 위한 간격 분할 접근법

나현우*, 이해성, 박부견*
포항공과대학교*

Interval partitioning approach for stability analysis of systems with two additive time-varying delays

Hyeon-Woo Na*, Hae Seong Lee, PooGyeon Park*
POSTECH*

Abstract - 본 논문은 두 개의 시변 지연을 갖는 시스템의 안정성 분석을 다룬다. 물리적 시스템이 네트워크상의 제어기를 통해 제어되는 경우, 두 종류의 독립적인 시간 지연이 발생한다. 본 논문에서는 이러한 두 개의 시변 지연을 갖는 시스템을 모델링하고 선형 행렬 부등식을 이용하여 시스템의 안정성을 판별할 수 있는 조건을 유도한다. 특히, 두 시변 지연의 범위에 대한 조건으로부터 얻어지는 시간 간격에 새로운 간격 분할 방법을 적용하여 덜 보수적인 해를 구한다. 수치적 예제를 통해 제안하는 결과의 타당성을 입증한다.

1. 서 론

시간 지연은 생물학적 시스템, 화학 시스템, 전기 시스템, 네트워크 제어 시스템과 같은 많은 실제 시스템에서 자주 발생하며 불안정성 및 성능 저하의 주요 요인으로 간주된다. 따라서 시간 지연 시스템의 안정성 분석에 대한 연구는 이론 및 실제 적용에 중요하다. 특히, 기존에 많이 분석되던 단일 시변 지연 시스템과는 달리 두 개의 시변 지연을 갖는 시스템은 네트워크 제어 및 장거리 제어에 대한 실질적 응용에 강력한 모델이다 [1]. 일반적으로 물리적 플랜트, 센서, 컨트롤러 및 액츄에이터가 네트워크를 통해 연결되어 있기 때문에 두 종류의 네트워크 유발 지연으로써 센서에서 컨트롤러로의 지연과 컨트롤러에서 액츄에이터로의 지연이 발생한다. 이 두 시간 지연은 네트워크 전송 조건으로 인해 동일하지 않을 수 있으므로 독립적으로 취급해야 한다.

두 개의 시변 지연을 갖는 시스템의 안정성 분석에 대한 기존 연구들은 두 시변 지연의 범위에 대한 조건으로부터 얻어지는 시간 간격을 분할하여 Lyapunov-Krasovskii Functional(LKF)을 구성하였다 [3]. 하지만 기존에 사용하던 분할 방식 외에 다른 부분 구간의 세트를 이용한다면 보수성을 낮출 여지가 있다. 따라서 본 논문에서는 기존에 사용되던 부분 구간 외에 새로운 간격 분할 접근법을 이용하여 덜 보수적인 해를 구하였다.

2. 문제 정리

다음과 같은 두 개의 시변 지연을 갖는 시스템을 고려한다.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - d_1(t) - d_2(t)), t \geq 0, \\ x(t) = \psi(t), t \in [-d_1 - d_2, 0] \end{cases} \quad (1)$$

여기서, $x(t) \in \mathbb{R}^n$은 상태 벡터, $\psi(t) \in \mathbb{R}^n$은 연속 초기 함수, A, B는 상수 행렬이다. 또한 두 시변 지연 $d_1(t)$, $d_2(t)$은 미분 가능하며, 다음을 만족한다.

$$0 \leq d_i(t) \leq d_i, \dot{d}_i(t) \leq \mu_i \ (i = 1,2) \quad (2)$$

여기서, $d_i, \mu_i \ (i = 1,2)$는 알려진 양의 상수이다. 편의를 위해 $d(t) = d_1(t) + d_2(t), d = d_1 + d_2$로 정의한다.

3. 본 론

정리 1. 주어진 상수 $d_i > 0, \mu_i > 0 \ (i = 1,2)$에 대해, 다음의 선형 행렬 부등식을 만족하는 행렬 $P_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} > 0 \ (i = 1,2)$, $Q_j \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0 \ (j = 1,2,3,4,5), R_k \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0 \ (k = 1,2)$, $M_l \in \mathbb{R}^{8n \times 8n} (l = 1,2)$이 존재하면 (2)를 만족하는 두 개의 시변 지연 $d_1(t), d_2(t)$를 가지는 시스템 (1)은 점근적으로 안정하다.

$$\begin{bmatrix} \Phi_0 + \Phi_i & E^T M_1^T F_i & \overline{E}^T M_2^T F_i \\ * & -diag\{1/d_1 \overline{R}_1, 1/d_2 \overline{R}_1\} & 0 \\ * & * & -diag\{1/d_1 \overline{R}_2, 1/d_2 \overline{R}_2\} \end{bmatrix} < 0,$$
$$\text{for } i = 1,2,3,4, \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_0 &= e_1^T (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5) e_1 - (1 - \mu_1) e_2^T Q_1 e_2 \\
&\quad - (1 - \mu_1 - \mu_2) e_3^T Q_2 e_3 - (1 - \mu_1) e_4^T Q_3 e_4 - e_5^T Q_4 e_5 \\
&\quad - e_{10}^T Q_5 e_{10} + d e_s^T (R_1 + R_2) e_s + He\{E^T M_1 E + \overline{E}^T M_2 \overline{E}\},
\end{aligned}$$
$\Phi_1 = He\{\Pi_0^T (P_1 \Pi_1 + P_2 \Pi_1)\}$, $\Phi_2 = He\{\Pi_0^T (P_1 \Pi_2 + P_2 \Pi_3)\}$,
$\Phi_3 = He\{\Pi_0^T (P_1 \Pi_4 + P_2 \Pi_5)\}$, $\Phi_4 = He\{\Pi_0^T (P_1 \Pi_6 + P_2 \Pi_7)\}$,
$F_1 = [E_1^T \ \ E_2^T]$, $F_2 = [E_1^T \ \ E_3^T]$,
$F_3 = [E_4^T \ \ E_2^T]$, $F_3 = [E_4^T \ \ E_3^T]$,
$\Pi_0 = col\{e_s, e_1 - e_5\}$, $\Pi_1 = col\{e_1, d_1 e_6 + d_2 e_7\}$,
$\Pi_2 = col\{e_1, d_1 e_6 + d_2 e_8\}$, $\Pi_3 = col\{e_1, d_1 e_6 + d_2 e_{12}\}$,
$\Pi_4 = col\{e_1, d_1 e_9 + d_2 e_7\}$, $\Pi_5 = col\{e_1, d_1 e_{11} + d_2 e_7\}$,
$\Pi_6 = col\{e_1, d_1 e_9 + d_2 e_8\}$, $\Pi_7 = col\{e_1, d_1 e_{11} + d_2 e_{12}\}$,

$$\begin{aligned}
E &= col\{e_1 - e_2, e_1 + e_2 - 2e_6, e_2 - e_3, e_2 + e_3 - 2e_7 \\
&\qquad e_3 - e_4, e_3 + e_4 - 2e_8, e_4 - e_5, e_4 + e_5 - 2e_9\}, \\
\overline{E} &= col\{e_1 - e_2, e_1 + e_2 - 2e_6, e_2 - e_3, e_2 + e_3 - 2e_7 \\
&\qquad e_{10} - e_5, e_{10} + e_5 - 2e_{12}, e_3 - e_{10}, e_3 + e_{10} - 2e_{11}\},
\end{aligned}$$

$\overline{R}_1 = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 3R_1 \end{bmatrix}, \overline{R}_2 = \begin{bmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & 3R_2 \end{bmatrix}$,
$e_s = Ae_1 + Be_3$,
$e_i = [0_{n \times (i-1)n} \ \ I_n \ \ 0_{n \times (12-i)n}], i = 1, 2, ..., 12$,
$E_j = [0_{2n \times 2(j-1)n} \ \ I_{2n} \ \ 0_{2n \times 2(4-j)n}], j = 1, 2, 3, 4.$

증명.
다음과 같은 LKF를 고려하자.

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t),$$

$$V_1(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \int_{t-d}^{t} x(s) ds \end{bmatrix}^T P_1 \begin{bmatrix} x(t) \\ \int_{t-d}^{t} x(s) ds \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x(t) \\ \int_{t-d}^{t} x(s) ds \end{bmatrix}^T P_2 \begin{bmatrix} x(t) \\ \int_{t-d}^{t} x(s) ds \end{bmatrix},$$

$$V_2(t) = \int_{t-d_1(t)}^{t} x^T(s) Q_1 x(s) ds + \int_{t-d_1(t)-d_2(t)}^{t} x^T(s) Q_2 x(s) ds$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{t-d_1(t)-d_2}^{t} x^T(s)Q_3x(s)ds+\int_{t-d}^{t} x^T(s)Q_4x(s)ds \\
&+\int_{t-d_1-d_2(t)}^{t} x^T(s)Q_5x(s)ds,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_3(t)=&\int_{-d}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^T(s)R_1\dot{x}(s)dsd\theta \\
&+\int_{-d}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)dsd\theta.
\end{aligned}
$$

본 논문에서는 주어진 적분 간격을 다음과 같은 2가지 방법의 간격 분할을 통해 분석한다.

$$
\begin{aligned}
T_1:&[t-d,t-d_1(t)-d_2],\,[t-d_1(t)-d_2,t-d_1(t)-d_2(t)],\\
&[t-d_1(t)-d_2(t),t-d_1(t)],\,[t-d_1(t),t],\\
T_2:&[t-d,t-d_1-d_2(t)],\,[t-d_1-d_2(t),t-d_1(t)-d_2(t)],\\
&[t-d_1(t)-d_2(t),t-d_1(t)],\,[t-d_1(t),t].
\end{aligned}
$$

편의를 위해 벡터 $\eta(t)=col\{x(t),x(t-d_1(t),x(t-d(t)),$ $x(t-d_1(t)-d_2),x(t-d),\frac{1}{d_1(t)}\int_{t-d_1(t)}^{t}x(s)ds,$ $\frac{1}{d_2(t)}\int_{t-d(t)}^{t-d_1(t)}x(s)ds,\frac{1}{d_2-d_2(t)}\int_{t-d_1(t)-d_2}^{t-d(t)}x(s)ds,$ $\frac{1}{d_1-d_1(t)}\int_{t-d}^{t-d_1(t)-d_2}x(s)ds,x(t-d_1-d_2(t)),$ $\frac{1}{d_1-d_1(t)}\int_{t-d_1-d_2(t)}^{t-d(t)}x(s)ds,\frac{1}{d_2-d_2(t)}\int_{t-d}^{t-d_1(t)-d_2(t)}x(s)ds\}$을 정의하자. 간격 분할을 고려한 LKF의 미분의 상한은 다음과 같이 주어진다.

$$
\begin{aligned}
&\dot{V}_1(t)\\
&=2\eta^T(t)\Big\{\Pi_0^TP_1\begin{bmatrix} e_1 \\ d_1(t)e_6+d_2(t)e_7+(d_2-d_2(t))e_8+(d_1-d_1(t))e_9\end{bmatrix}\\
&\quad+\Pi_0^TP_2\begin{bmatrix} e_1 \\ d_1(t)e_6+d_2(t)e_7+(d_2-d_2(t))e_{12}+(d_1-d_1(t))e_{11}\end{bmatrix}\Big\}\eta(t),\\
&\dot{V}_2(t)\\
&\le\eta^T(t)\{e_1^T(Q_1+Q_2+Q_3+Q_4+Q_5)e_1-(1-\mu_1)e_2^TQ_1e_2\\
&\quad-(1-\mu_1-\mu_2)e_3^TQ_2e_3-(1-\mu_1)e_4^TQ_3e_4-e_5^TQ_4e_5-e_{10}^TQ_5e_{10}\}\eta(t),\\
&\dot{V}_3(t)\\
&=\eta^T(t)\{de_s^T(R_1+R_2)e_s\}\eta(t)-\int_{t-d_1(t)}^{t}\dot{x}^T(s)(R_1+R_2)\dot{x}(s)ds\\
&\quad-\int_{t-d(t)}^{t-d_1(t)}\dot{x}^T(s)(R_1+R_2)\dot{x}(s)ds-\int_{t-d_1(t)-d_2}^{t-d(t)}\dot{x}^T(s)R_1\dot{x}(s)ds\\
&\quad-\int_{t-d}^{t-d_1(t)-d_2}\dot{x}^T(s)R_1\dot{x}(s)ds-\int_{t-d_1-d_2(t)}^{t-d(t)}\dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)ds\\
&\quad-\int_{t-d}^{t-d_1-d_2(t)}\dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)ds.
\end{aligned}
$$

위의 적분항은 Wirtinger-based integral inequality [2]와 extended reciprocally convex matrix inequality [3]을 순차적으로 적용하면 그 상한을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&\dot{V}_3(t)\\
&\le\eta^T(t)\Big\{de_s^T(R_1+R_2)e_s+He\Big\{E^TM_1E+\overline{E}^TM_2\overline{E}\\
&+d_1(t)E^TM_1^TE_1^T\overline{R}^{-1}E_1M_1E+d_2(t)E^TM_1^TE_2^T\overline{R}_1^{-1}E_2M_1E\\
&+(d_2-d_2(t))E^TM_1^TE_3^T\overline{R}_1^{-1}E_3M_1E+(d_1-d_1(t))E^TM_1^TE_4^T\overline{R}_1^{-1}E_4M_1E\\
&+d_1(t)\overline{E}^TM_2^TE_1^T\overline{R}_2^{-1}E_1M_2\overline{E}+d_2(t)\overline{E}^TM_2^TE_2^T\overline{R}_2^{-1}E_2M_2\overline{E}\\
&+(d_2-d_2(t))\overline{E}^TM_2^TE_3^T\overline{R}_2^{-1}E_3M_2\overline{E}+(d_1-d_1(t))\overline{E}^TM_2^TE_4^T\overline{R}_2^{-1}E_4M_2\overline{E}\Big\}\Big\}
\end{aligned}
$$

따라서 LKF의 미분의 상한은 $d_1(t),d_2(t)$에 대해 선형이므로 convex combination을 이용하고, nonlinear term들에 대해 Schur complement를 적용하면, (3)의 조건을 얻을 수 있다. ■

4. 예　제

정리 1의 성능을 확인하기 위해 다음의 시스템 행렬을 가지는 시스템 (1)을 고려한다.

$$
A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -0.9\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}.
$$

<표 1>과 <표 2>는 두 시변 지연의 미분의 상한이 $\mu_1=0.1$, $\mu_2=0.8$일 때, **정리** 1의 결과를 통해 구한 최대 시변 지연 d_1과 d_2를 보여준다. 비교 결과에서 볼 수 있듯, 제안하는 방법은 이전 결과보다 덜 보수적인 해를 제공한다.

<표 1> 여러 d_1에 따른 d_2 비교

d_1	1.0	1.2	1.5
[3]	1.233	1.035	0.752
정리 1	1.383	1.182	0.883

<표 2> 여러 d_2에 따른 d_1 비교

d_2	0.3	0.4	0.5
[3]	2.441	2.145	1.912
정리 1	2.452	2.182	1.982

5. 결　론

본 논문에서는 새로운 간격 분할 접근법을 이용하여 두 개의 시변 지연을 갖는 시스템의 안정성을 분석하였다. 두 종류의 독립적인 시간 지연이 발생하는 시스템은 두 시변 지연의 범위 조건으로부터 얻어지는 시간 간격에 따라 LKF를 선정하여 선형 행렬 부등식을 이용한 안정성 조건을 유도할 수 있다. 본 논문에은 이 시간 간격을 분할한 기존 방식 외에 다른 방식으로 구간을 나누는 새로운 간격 분할 접근법을 이용하여 덜 보수적인 해를 구하였다. 최종적으로, 수치적 예제를 통해 본 연구 결과의 타당성을 입증하였다.

감사의 글

This research was supported by the Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Science, ICT, and Future Planning (2020R1A2C2005709)

[참 고 문 헌]

[1] Lam, James, Huijun Gao, and Changhong Wang. "Stability analysis for continuous systems with two additive time-varying delay components." Systems & Control Letters 56.1: 16-24., 2007.

[2] Seuret, Alexandre, and Frédéric Gouaisbaut. "Wirtinger-based integral inequality: application to time-delay systems." Automatica 49.9: 2860-2866, 2013.

[3] Jiao, Jianmin, and Rui Zhang. "An extended reciprocally convex matrix inequality and its application to stability analysis of systems with additive time-varying delays." Journal of the Franklin Institute 357.4: 2282-2294, 2020.