

포화 구동기를 갖는 회전형 도립진자의 스윙업 제어

이호섭*, 박부건*
포항공과대학교*

Swing Up Control for Rotary Inverted Pendulum under Actuator Saturation

Ho Sub Lee*, PooGyeon Park*
POSTECH*

Abstract - 본 논문은 포화 구동기를 가지는 회전형 도립진자의 스윙업 제어를 제안한다. 동작점 근처에서 선형화한 회전형 도립진자 시스템을 기반으로 선형 행렬 부등식 방법으로 제어를 설계한다. 실험에서는 실제 회전형 도립진자 시스템의 입력단에 제한조건을 걸어두고 실험하고 제안한 조건을 활용하면 포화구동기를 가지는 회전형 도립진자의 스윙업 제어의 타당성을 보여준다.

1. 서 론

도립진자 시스템은 대표적인 비선형 시스템으로 제어기 성능 평가의 대상을 많이 사용기 때문에 많은 연구진들이 연구의 대상으로 많이 사용한다. 도립진자 모델은 전동 모빌리티나 이족 보행 로봇, 보행 재활 장비 등에 많이 사용된다. 여러 도립진자 시스템 중 회전형 도립진자 시스템은 모터의 회전에 진자를 세우는 시스템이다. 회전형 도립진자 시스템은 강한 비선형성을 가지고 있어 선형화 기법과 제어기 설계에 많이 사용된다.

실제 환경에서 구동기의 출력의 한계로 인해 제어기에서 만든 값은 초과하는 값은 포화된 값으로 출력이 제한되어있다. 이것은 큰 비선형성을 만들고 제어기의 성능을 저하시키고 심한 경우 시스템을 발산하게 만든다. 그렇기 때문에 제어기를 설계할 때는 구동기의 포화를 고려하여 제어기를 설계하여야만 한다.

본 논문은 선형 행렬 부등식 방법을 이용한 포화 구동기를 가지는 회전형 도립진자의 스윙업 제어기 설계를 제안한다.

표시법 : (*)은 상응하는 대칭행렬을 나타낸다. $Co\{\cdot\}$ 은 조건에서 \cdot 의 블록 조합을 나타낸다.

2. 본 론

2.1 시스템 서술

회전형 도립진자 시스템은 Euler-Lagrange 방법을 이용하여 운동방정식을 나타내면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \left(m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha)^2 + J_r \right) \ddot{\theta} \\ & - \left(\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \right) \ddot{\alpha} + \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \right) \dot{\theta} \dot{\alpha} \\ & + \left(\frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin(\alpha) \right) \dot{\alpha}^2 = \tau - D_r \dot{\theta}, \end{aligned} \quad (1-1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \ddot{\theta} + \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \ddot{\alpha} \\ & - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p L_p g \sin(\alpha) = -D_p \dot{\alpha}. \end{aligned} \quad (1-2)$$

여기서 $\tau = \frac{k_m (V_m - k_m \dot{\theta})}{R_m}$ 는 토크를 나타내며 여기서 사용된 파라미터들은 [1]에서 사용된 값을 사용한다.

식 (1)은 비선형 시스템이므로 시스템을 동작점 $\theta = 0$ 에서 선

형화하여 나타내면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = & \frac{1}{J_T} \left(- \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) D_r \dot{\theta} + \frac{1}{2} m_p L_p L_r D_p \dot{\alpha} + \frac{1}{4} m_p^2 L_p^2 L_r g \alpha \right. \\ & \left. + \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \tau \right), \end{aligned} \quad (2-1)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} = & \frac{1}{J_T} \left(\frac{1}{2} m_p L_p L_r D_r \dot{\theta} - \left(J_r + m_p L_r^2 \right) D_p \dot{\alpha} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} m_p L_p g \left(J_r + m_p L_r^2 \right) \alpha - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \tau \right), \end{aligned} \quad (2-2)$$

여기서 $J_T = J_p m_p L_r^2 + J_r J_p + \frac{1}{4} J_r m_p L_p^2$.

식(2)를 이용하면 다음과 같은 상태 공간 모델을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 $x = [\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}]^T$ 는 상태변수, $y = [\theta \ \alpha]^T$ 는 출력이고 시스템 행렬 A, B, C, D는 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & J_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_T \\ 0 & \frac{1}{4} m_p^2 L_p^2 L_r g & - \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) D_r & \frac{1}{2} m_p L_p L_r D_p \\ 0 & - \frac{1}{2} m_p L_p g \left(J_r + m_p L_r^2 \right) & \frac{1}{2} m_p L_p L_r D_r & - \left(J_r + m_p L_r^2 \right) D_p \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \\ - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

포화 구동기를 갖는 회전형 도립진자 시스템의 스윙업 제어기 설계를 위해 다음과 같은 보조정리를 사용한다.

보조정리 1 [2],[3]

벡터 u, v 를 다음과 같이 정의한다. $u = [u_1 \ \dots \ u_m]^T$, $v = [v_1 \ \dots \ v_m]^T$, 여기서 v 는 가상 제어 입력이다.

만약 모든 $i \in [1, m]$ 에서 $|e_i^T v| \leq \alpha$ 를 만족하면 $sat(U) \in Co\{E_j u + E_j^- v \mid j \in [1, 2^m]\}$ 를 만족한다. 여기서 $sat(U)$ 는 포화된 입력을 나타내고 e_i 는 i 번째 요소는 1이고 나머지는 0인 단일 벡터이고 E_p 는 p 번째 대각요소가 1이고 나머지는 0인 $m \times m$ 행렬이고 $E_p^- = I - E_p$ 이다. 위에서 언급한 정의들을 사용하면 포화된 입력은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$sat(U) = \sum_{j=1}^{2^m} \sigma_j \{E_j u + E_j^- v\}$$

여기서 σ_j 는 $\sum_{j=1}^{2^m} \sigma_j = 1, \sigma_j \geq 0$ 을 만족한다.

2.3 주요 결과

회전형 도립진자의 스윙업 제어를 위해 다음과 같은 비용 함수를 최소화 하는 문제를 고려한다.

$$J = \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u dt \quad (4)$$

정리 1

만약 행렬 Q, R 이 주어지 있을 때 다음과 같은 조건을 만족하는 양의 정부호 행렬 \bar{P} 와 임의의 행렬 Y_1, Y_2 가 모든 $i \in [1, m], p \in [1, 2^m]$ 에서 존재한다면 회전형 도립진자 시스템 (1)은 주어진 각도 내에서 안정성을 보장한다.

$\min trace(P)$

subject to

$$\begin{bmatrix} sym(A\bar{P} - B\bar{Y}) & \bar{P} & \bar{Y}^T \\ (*) & -Q^{-1} & 0 \\ (*) & (*) & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} \mu^2 e_i^T Y_2 \\ (*) & \bar{P} \end{bmatrix} > 0,$$

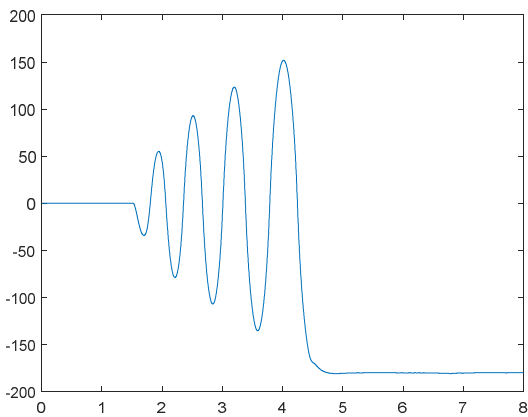
여기서,

$$\bar{Y} = E_j Y_1 + E_p^- Y_2, E_j^- = I - E_j,$$

증명 : 자세한 증명은 생략한다.

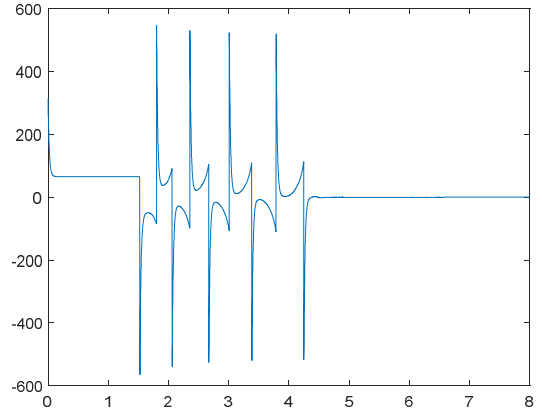
3. 실험

실험에서는 Quanser 사의 QUBE-Servo 2를 사용하여 실험을 진행하였다. 사용한 파라미터 값은 [1]에서 사용한 값을 사용하였다.

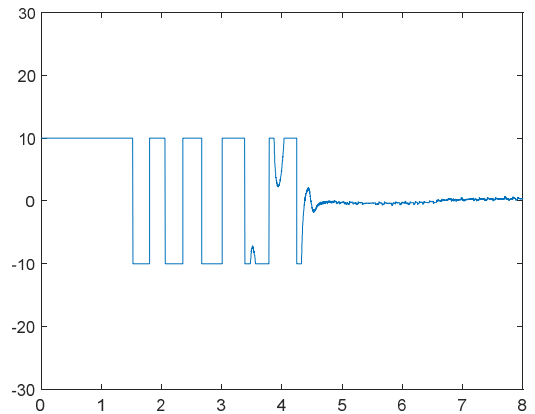


<그림 1> 회전형 도립진자의 각도

그림 1은 회전형 도립진자의 각도를 보여주며 에너지 인가 전 진자가 아래로 향하는 방향을 0도이기 때문에 진자가 위를 향해 바로 서있는 -180도로 유지되는 것을 볼 수 있다. 또한 그림 2와 그림 3을 비교하면 구동기의 포화로 인해 입력이 포화되어 나타난 것을 볼 수 있다.



<그림 2> 포화가 없는 구동기 입력



<그림 3> 포화를 고려한 구동기 입력

4. 결론

본 논문은 포화 구동기를 갖는 회전형 도립진자의 선형 행렬 부등식 접근법 기반의 스윙업 제어를 다룬다. 실험 결과를 통해 주어진 포화 수치에서도 회전형 도립진자가 잘 제어됨을 보여주며 제안한 정리의 타당성을 보여준다.

감사의 글

This research was supported by the Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Science, ICT, and Future Planning (2020R1A2C2005709)

[참고 문헌]

- [1] 이호섭, 나현우, 김경수, 이해성, 박부건.(2021).회전형 도립진자의 스윙업 최적 제어 : LMI 접근법.대한전기학회 학술대회 논문집,(),1699-1700.
- [2] Yong-Yan Cao, Zongli Lin, and Yacov Shamash. Set invariance analysis and gain-scheduling control for lpv systems subject to actuator saturation. Systems & Control Letters, 46(2):137 - 151, 2002.
- [3] Tingshu Hu and Zongli Lin. Control systems with actuator saturation: analysis and design. Springer Science & Business Media, 2001.